電気のための数学

■　「指数の計算」

$x^1 = x$

$x^2 = x \times x$

$x^3 = x \times x \times x$

を x の累乗といいます。また、累乗の数の 1、2、3 を指数といいます。

・指数計算の公式

$$x^{\mathrm{m}} \times x^{\mathrm{n}} = x^{\mathrm{m}+\mathrm{n}}$$

$$x^{\mathrm{m}} \div x^{\mathrm{n}} = \frac{x^{\mathrm{m}}}{x^{\mathrm{n}}} = x^{\mathrm{m}-\mathrm{n}}$$

$$\frac{1}{x^{\mathrm{n}}} = x^{-\mathrm{n}}$$ 分母の指数を分子に移すと＋－の符号が逆になる

$$x^0 = x^{\mathrm{n}-\mathrm{n}} = x^{\mathrm{n}} \div x^{\mathrm{n}} = \frac{x^{\mathrm{n}}}{x^{\mathrm{n}}} = 1$$

〔計算例〕

$$10^6 \times 10^3 = 10^{6+3} = 10^9$$

$$10^6 \div 10^3 = \frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$

$$\frac{1}{10^6} = \frac{10^0}{10^6} = 10^0 \div 10^6 = 10^{0-6} = 10^{-6}$$

$$\frac{1}{10^{-3}} = \frac{10^0}{10^{-3}} = 10^0 \div 10^{-3} = 10^{0-(-3)} = 10^3$$

■　「ルートの計算」

$y^2 = x$ の関係があるときに、

$y = \sqrt{x}$

と表して、y を x のルートといいます。ルートを指数で表すと、

$y = x^{1/2}$

と表すことができます。

〔計算例〕

$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

$\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

$\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$

$\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

$\sqrt{64}=\sqrt{2\times32}=\sqrt{2\times4\times8}=\sqrt{8^2}=8$

$\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$

$\sqrt{400}=\sqrt{4\times100}=\sqrt{2^2\times10^2}=\sqrt{20^2}=20$

$\sqrt{625}=\sqrt{5\times125}=\sqrt{5\times5\times25}=\sqrt{25^2}=25$

$\sqrt{900}=\sqrt{9\times100}=\sqrt{3^2\times10^2}=\sqrt{30^2}=30$

・$\sqrt{\ }$の数値（約の数値もある）

xの値	1	2	3	4	10	16	100
$\sqrt{x}$	1	1.41	1.73	2	3.16	4	10

■　「log」

$10^y=x$の関係があるときに、

$y=\log_{10}x$

と表して、yをxの常用対数といいます。ここで、10は常用対数の底と呼びます。また、$e=2.718\cdots\cdots$　を底とした対数を$y=\log_e x$と表して、自然対数といいます。eを自然対数の底と呼び、eは微分や積分をしたときに同じ値のeとなる特殊な定数です。

・log の公式

$\log_{10}(a\times b)=\log_{10}a+\log_{10}b$　　真数の掛け算は log の足し算

$\log_{10}a^b=b\times\log_{10}a$

$\log_{10}\dfrac{a}{b}=\log_{10}(a\div b)=\log_{10}a-\log_{10}b$　　真数の割り算は log の引き算

〔計算例〕

$\log_{10}5=\log_{10}(10\div2)=\log_{10}10-\log_{10}2$

$\fallingdotseq 1-0.3=0.7$

$$\log_{10} 4 = \log_{10}(2 \times 2) = \log_{10} 2 + \log_{10} 2$$
$$\fallingdotseq 0.3 + 0.3 = 0.6$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10}(2 \times 10)$$
$$= \log_{10} 2 + \log_{10} 10$$
$$\fallingdotseq 0.3 + 1 = 1.3$$
$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2$$
$$= 2 \times \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$$

・log の数値（約の数値もある）

x	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1/2	1	2	3	4	5	10	20	10^2	10^3
y	−3	−2	−1	−0.3	0	0.3	0.48	0.6	0.7	1	1.3	2	3

$10^0 = 1$、$10^1 = 10$、$10^2 = 100$、$10^3 = 1{,}000$

■　「デシベル」

電力や電圧の比を表すのにデシベルを用います。電圧比を A_V とすると、電圧比のデシベル A_{dB} は、次式で表されます。

$$A_{dB} = 20 \log_{10} A_V \text{〔dB〕}$$

電力比を G とすると、電力比のデシベル G_{dB} は、次式で表されます。

$$G_{dB} = 10 \log_{10} G \text{〔dB〕}$$

〔計算例〕

電力比 $G = 400$ のデシベル G_{dB} を求めると、

$G = 400 = 2 \times 2 \times 100$　　真数の掛け算はデシベルの足し算

$G_{dB} = 3 + 3 + 20 = 26$〔dB〕

電力比 $G_{dB} = 9$〔dB〕の真数 G を求めると、

$G_{dB} = 9 = 3 + 3 + 3$〔dB〕　　デシベルの足し算は真数の掛け算

$G = 2 \times 2 \times 2 = 8$

電力比 $G_{dB} = 24$〔dB〕の真数 G を求めると、

$G_{dB} = 24 = 30 - 6 = 30 - 3 - 3$〔dB〕　　デシベルの引き算は真数の割り算

$G = 10^3 \div 2 \div 2 = \dfrac{1{,}000}{4} = 250$

電圧比$A_V=4$のデシベルA_{dB}を求めると、

$A_V=4=2\times2$

$A_{dB}=6+6=12$〔dB〕

電圧比$A_V=500$のデシベルA_{dB}を求めると、

$A_V=500=1{,}000\div2$

$A_{dB}=60-6=54$〔dB〕

電圧比$A_{dB}=46$〔dB〕の真数A_Vを求めると、

$A_{dB}=46=40+6$

$A_V=100\times2=200$

・dBの数値（約の数値もある）

比	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1/2	1	2	3	4	5	10	20	10^2	10^3
電力	−30	−20	−10	−3	0	3	4.8	6	7	10	13	20	30
電圧	−60	−40	−20	−6	0	6	9.6	12	14	20	26	40	60

この表の数値を覚えておいて計算すれば、$\log_{10}$の計算式を用いないで計算することができます。

■ 「三角関数」

図１に示すような長辺rの直角三角形において、短辺の長さをa、bとすると、それらの比は次式のように三角関数で表されます。

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

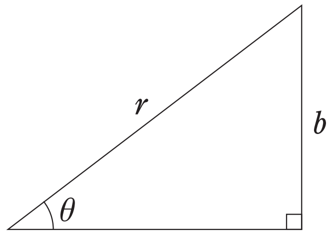

図１

rは次式で表されます。

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

これらの逆数の関数もありますが、無線工学では$\sec\theta$が使われます。

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{a}$$

・三角関数の公式

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

・三角関数の数値

θ〔°〕	0	30	45	60	90
θ〔rad〕	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

■　「複素数とベクトル」

交流や高周波の電圧や電流は、時間とともに変化する sin 関数として表すことができます。抵抗、コイル、コンデンサを直列に接続した回路に電流が流れているとき、それぞれに加わる電圧は大きさや位相が異なります。このような電流や電圧は、大きさと位相差を持ったベクトル量として計算します。電圧／電流で表されるインピーダンスも同様にベクトル量として計算します。

大きさと位相を表すベクトル量は、図２のように直角に引かれた実軸と虚軸で示される平面上の位置で表されます。このとき、虚数は j の虚数記号を付けて表して、複素数は次式のように表されます。

$$\dot{Z}=R+jX$$

$\dot{Z}$ は複素数、R は実数、jX は虚数を表します。

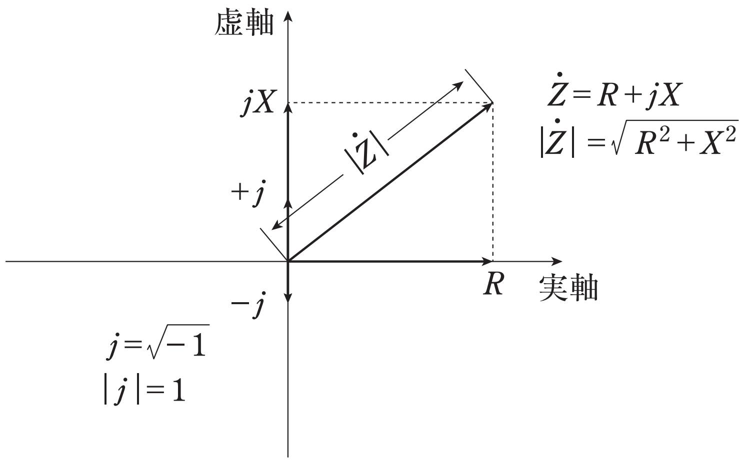

図２　複素数とベクトル

・**複素数の公式**

和（差）は、実数部どうし虚数部どうしで和（差）を計算する。

$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1$、$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_2$ のとき、

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

$$\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 = (R_1 - R_2) + j(X_1 - X_2)$$

$\dot{Z}$ の大きさは、絶対値記号を付けて $|\dot{Z}|$ 又は・を取った Z で表して、

$$|\dot{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$ 大きさを計算するときは j を付けない

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = j \times j = -1$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \times j} = \frac{j}{-1} = -j$$

〔計算例〕

$$j\omega L = jX_{\mathrm{L}}$$

$$\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_{\mathrm{C}}$$

$$\frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX) \times (R - jX)}$$

$$= \frac{R - jX}{R^2 - jXR + jXR - j^2X^2}$$

$$= \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$\frac{jX_{\mathrm{L}} \times (-jX_{\mathrm{C}})}{jX_{\mathrm{L}} + (-jX_{\mathrm{C}})} = \frac{j \times (-j) \times X_{\mathrm{L}}X_{\mathrm{C}}}{j(X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}})}$$

$$= -j\frac{X_{\mathrm{L}}X_{\mathrm{C}}}{X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}}}$$