計算問題を解くための数学の基礎

数 学 の 基 礎

計算問題を解くために必要な四則演算の優先順位、計算法則、分数計算、指数計算などの数学の基礎を紹介します。

■ 「四則演算」

四則演算とは、加減乗除の演算のことをいいます。

・足し算

〔例〕$2+4=6$

・引き算

〔例〕$6-2=4$

・掛け算

〔例〕$2\times4=8$

・割り算

〔例〕$8\div2=4$

■ 「四則演算の優先順位」

四則演算の優先順位は、次の順序になります。

・優先順位 1

カッコ(　)があれば、カッコの中を先に計算します。

〔例〕$2\times(2+3)=2\times5=10$

$3\times(5-3)=3\times2=6$

・**優先順位２**

+、−、×、÷が混ざった計算では、×、÷を先に計算します。

〔例〕$5+4\times3=5+12=17$

$8\div2+2=4+2=6$

・**優先順位３**

カッコ(　)と+、−、×、÷が混ざった計算では、カッコの中を先に計算し、次に×、÷を計算します。

〔例〕$2\times(2+3)+3-8\div2=2\times5+3-8\div2=10+3-4=9$

$4\times(3+1)+(4-2)\div2=4\times4+2\div2=16+1=17$

■　「計算法則」

交換法則、結合法則、分配法則を次に示します。

・**交換法則**

$a+b=b+a$　　〔例〕$1+2=2+1$

$ab=ba$　　$1\times2=2\times1$

・**結合法則**

$(a+b)+c=a+(b+c)$　　〔例〕$(1+2)+3=1+(2+3)$

$(ab)c=a(bc)$　　$(1\times2)\times3=1\times(2\times3)$

・**分配法則**

$a(b+c)=ab+ac$　　〔例〕$2\times(1+3)=2\times1+2\times3$

$(b+c)a=ba+ca$　　$(1+2)\times3=1\times3+2\times3$

■　「分数計算」

分数の四則演算、比例計算を次に示します。分数の足し算や引き算は、分母を同じ数にして計算します。

・足し算

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

〔例〕$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{3}=\frac{3}{3}=1$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\times\frac{b}{b}=\frac{ad+cb}{bd}$$

〔例〕$\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{1\times3+4\times2}{2\times3}$

$=\frac{3+8}{6}=\frac{11}{6}$

・引き算

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

〔例〕$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{d}-\frac{c}{d}\times\frac{b}{b}=\frac{ad-cb}{bd}$$

〔例〕$\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1\times3-4\times2}{2\times3}$

$=\frac{3-8}{6}=-\frac{5}{6}$

・掛け算

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

〔例〕$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

・割り算

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

〔例〕$\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

・比例計算

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ならば、$ad=bc$

〔例〕$\frac{1}{2}=\frac{5}{x}$ ならば、$1\times x=2\times5$ より、

$x=10$

■　「指数計算」

同じ数や同じ記号がいくつか掛け算されたとき、その個数を指数といいます。例えば、a が3個掛け算されていると、

$$a \times a \times a = a^3$$

と表します。これを a の3乗といいます。

指数計算の法則を次に示します。

・$a^m \times a^n = a^{m+n}$　〔例〕$10^3 \times 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$

$10^{-3} \times 10^{-2} = 10^{(-3)+(-2)}$

$= 10^{-3-2} = 10^{-5}$

・$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　〔例〕$10^6 \div 10^3 = \dfrac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$

・$(a^m)^n = a^{mn}$　〔例〕$(10^3)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6$

・$(ab)^n = a^n b^n$　〔例〕$(2\times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

・$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　〔例〕$10^{-6} = \dfrac{1}{10^6}$

・$a^0 = 1$　〔例〕$10^3 \times 10^{-3} = 10^{3-3}$

$= 10^0 = 1$

・$\left(\dfrac{b}{a}\right)^m = \dfrac{b^m}{a^m}$　〔例〕$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{25}$

■　「平方根の計算」

2乗すると a になる数 x、すなわち x^2 を満たす x を a の平方根(又は2乗根)といいます。

$a>0$、$b>0$、$k>0$ のとき、次式が成り立ちます。

・$(\sqrt{a})^2=a$、$\sqrt{a^2}=a$

・$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

・$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

・$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

・$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

〔例〕

(1)25の平方根は、

$$\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$$

$$\sqrt{25}=\sqrt{(-5)^2}=-5$$

となるので、＋5と－5ですが、通常の計算では正の値を求めます。

(2) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{5}{2\sqrt{8}}=\dfrac{5}{2\times\sqrt{2^2\times2}}=\dfrac{5}{2\times2\sqrt{2}}=\dfrac{5}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{5\times\sqrt{2}}{4\times2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

または、

$$\frac{5}{2\sqrt{8}}=\frac{5\times\sqrt{8}}{2\times\sqrt{8}\times\sqrt{8}}=\frac{5\sqrt{2^2\times2}}{2\times8}=\frac{5\times2\sqrt{2}}{16}=\frac{10\times\sqrt{2}}{16}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

■　「対数計算」

$a>0$、$a\neq 1$ のとき、$x=\log_a y$ を対数関数といい、a を底、$y(>0)$ を真数といいます。また、$a=10$ の対数を常用対数といいます。常用対数の公式を次に示します。

・$\log_{10}N=m \Leftrightarrow N=10^m$　　〔例〕$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3 \Leftrightarrow 2 \fallingdotseq 10^{0.3}$

・$\log_{10}AB=\log_{10}A+\log_{10}B$　　〔例〕$\log_{10}20=\log_{10}(10\times 2)=\log_{10}10+\log_{10}2$

・$\log_{10}\dfrac{A}{B}=\log_{10}A-\log_{10}B$　　〔例〕$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2$

・$\log_{10}A^n=n\log_{10}A$　　〔例〕$\log_{10}2^3=3\times\log_{10}2$

$\log_{10}10=1$、$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3$、$\log_{10}1=0$ は覚えておくと便利です。

また、$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3$ を覚えていれば、次のような計算ができます。

$$\begin{aligned}\log_{10}4&=\log_{10}(2\times 2)\\&=\log_{10}2+\log_{10}2\\&\fallingdotseq 0.3+0.3=0.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}5&=\log_{10}(10\div 2)\\&=\log_{10}10-\log_{10}2\\&\fallingdotseq 1-0.3=0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}8&=\log_{10}(2\times 2\times 2)\\&=\log_{10}2+\log_{10}2+\log_{10}2\\&\fallingdotseq 0.3+0.3+0.3=0.9\end{aligned}$$